Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica	codice 810590 08 marzo 2024

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

1	a
2	a
3	d
4	d
5	a
6	a
7	a
8	a
9	c
10	d
11	b
12	d

1. La funzione $f(x) = \begin{cases} e^{x^2 \sin \frac{1}{x} + \sin x} & \text{se } x > 0 \\ x^3 + 1 & \text{se } x \leq 0, \end{cases}$ nel punto $x = 0$

► (a) ha un punto angoloso (b) è derivabile (c) non è continua (d) ha un punto di cuspide

Soluzione:

$$f(x)=\begin{cases} e^{x^2\sin\frac{1}{x}+\sin x} & \text{se } x>0 \\ x^3+1 & \text{se } x\leq 0 \end{cases}$$

$f(0)=0^2+1=1$, $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} x^3+1=1$

Per $x\to 0^+$ $f(x)=e^{x^2\sin\frac{1}{x}+\sin x}=e^{x^2\sin\frac{1}{x}+x+o(x^2)}=$

$=e^{x\left(x\sin\frac{1}{x}+1+o(x)\right)}\to e^{0\left(0\cdot\text{limitata}+1+0\right)}=e^0=1$

Quindi f è continua in $x=0$.

Se $x<0$ $f'(x)=3x^2$ $\lim_{x\to 0^-} f'(x)=\lim_{x\to 0^-} 3x^2=0$.

Poiché f è continua in $x=0$ allora $f'_-(0)=0$.

$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\left(e^{x^2\sin\frac{1}{x}+\sin x}-1\right)=$

$=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\left(e^{x\left(x\sin\frac{1}{x}+1+o(x)\right)}-1\right)=$

$=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\left(\cancel{1}+x\left(x\sin\frac{1}{x}+1+o(x)\right)+o\left(x\left(x\sin\frac{1}{x}+1+o(x)\right)\right)-\cancel{1}\right)=$

$=\lim_{x\to 0^+} x\sin\frac{1}{x}+1+o(x)+o\left(x\sin\frac{1}{x}+1+o(x)\right)=$

$=0\cdot\text{limitata}+1+0+o(1)=1$

Dato che $f'_+(0)=1$ e $f'_-(0)=0$ allora f ha un punto angoloso in $x=0$.

2. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{x^3}+x^2}{e^{x^2}+x^3}=$

► (a) 0 (b) 1 (c) $-\infty$ (d) $+\infty$

Soluzione:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{x^3}+x^2}{e^{x^2}+x^3} = \frac{e^{-\infty}+\infty}{e^{\infty}-\infty} = \frac{0+\infty}{\infty-\infty} = ?$$

$$\frac{e^{x^3}+x^2}{e^{x^2}+x^3} = \frac{x^2\left(\frac{e^{x^3}}{x^2}+1\right)}{e^{x^2}\left(1+\frac{x^3}{e^{x^2}}\right)}$$

$\frac{e^{x^3}}{x^2} \to 0$, $\quad \frac{x^3}{e^{x^2}} \to 0$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{e^{x^2}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{-t^{3/2}}{e^t} = 0$$

con $t=x^2$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{e^t} = 0$$

con la sostituzione $t=x^2$

quindi $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{e^{x^3}+x^2}{e^{x^2}+x^3} = 0$.

3. $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{1}{1-\cos(x^5)} \int_0^{x^2} t\sin(t^3)\,dt$

(a) vale $+\infty$

(b) è un numero reale maggiore o uguale a 1

(c) vale 0

► (d) è un numero reale appartenente all'intervallo (0,1)

Soluzione:

$$\lim_{x\to0} \frac{1}{1-\cos(x^5)} \int_0^{x^2} t\sin(t^3)\,dt = \lim_{x\to0} \frac{\int_0^{x^2} t\sin(t^3)\,dt}{1-\cos(x^5)} = \frac{\int_0^0 t\sin(t^3)\,dt}{1-\cos 0} = \frac{0}{0}$$

Proviamo a usare il teorema di De l'Hôpital.

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^{x^2} t\sin(t^3)\,dt\right) = x^2\sin((x^2)^3)\cdot 2x = 2x^3\sin(x^6)$$

$$\frac{d}{dx}\left(1-\cos(x^5)\right) = \sin(x^5)\cdot 5x^4.$$

$$\lim_{x\to0} \frac{2x^3\sin(x^6)}{5x^4\sin(x^5)} = \lim_{x\to0} \frac{2x^3\left(x^6+o(x^{12})\right)}{5x^4\left(x^5+o(x^{10})\right)} =$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{2\cancel{x^9}\left(1+o(x^6)\right)}{5\cancel{x^9}\left(1+o(x^5)\right)} = \frac{2(1+0)}{5(1+0)} = \frac{2}{5} \in (0,1).$$

4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x \, dx =$

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1-e^{\frac{\pi}{2}}}{2}$ (c) 0 ► (d) $\frac{e^{\frac{\pi}{2}}-1}{2}$

Soluzione:

Calcoliamo una primitiva di $e^x \cos x$ per parti, integrando e^x e derivando $\cos x$, iterando l'operazione due volte.

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \cos x - \int e^x (-\sin x) \, dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx =$$

$$= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx$$

Riportando l'ultimo integrale al primo membro otteniamo

$$2 \int e^x \cos x \, dx = e^x \cos x + e^x \sin x + c, \text{ quindi}$$

$$\int e^x \cos x \, dx = \frac{e^x (\cos x + \sin x) + c}{2}$$

Dal teorema di Torricelli

$$\int_0^{\pi/2} e^x \cos x \, dx = \left[\frac{e^x (\cos x + \sin x)}{2} \right]_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{e^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2}\right)}{2} - \frac{e^0 (\cos 0 + \sin 0)}{2} = \frac{e^{\pi/2}(0+1)}{2} - \frac{1(1+0)}{2} =$$

$$= \frac{e^{\pi/2} - 1}{2}.$$

5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\log(1+x) - \log x}{\sqrt{x}} \, dx$

► (a) converge (b) diverge negativamente (c) non esiste (d) diverge positivamente

Soluzione:

$f(x) = \dfrac{\log(1+x) - \log x}{\sqrt{x}}$. Risulta che $f(x) > 0 \ \forall x > 0$.

Dividiamo l'intervallo di integrazione e consideriamo prima $\int_0^1 f(x)dx$.

Consideriamo separatamente $\dfrac{\log(1+x)}{\sqrt{x}}$ e $\dfrac{-\log x}{\sqrt{x}}$

Per $x \to 0$ $\log(1+x) = x + o(x) \Rightarrow \dfrac{\log(1+x)}{\sqrt{x}} = \dfrac{x(1+o(1))}{x^{1/2}} = x^{1/2}(1+o(1))$

quindi $\dfrac{\log(1+x)}{\sqrt{x}}$ è integrabile secondo Riemann e $\int_0^1 \dfrac{\log(1+x)}{\sqrt{x}} dx$ converge.

Per la seconda funzione eseguiamo la sostituzione $x = \frac{1}{t}$, $dx = -\frac{dt}{t^2}$

$$-\int_0^1 \frac{\log x}{x^{1/2}} dx = -\int_{+\infty}^1 \frac{\log\left(\frac{1}{t}\right)}{\left(\frac{1}{t}\right)^{1/2}} \left(-\frac{dt}{t^2}\right) = \int_1^{+\infty} \frac{\log t}{t^{3/2}} dt$$ che converge

per confronto asintotico con $g(t) = \dfrac{1}{t^{5/4}}$. Quindi $\int_0^1 f(x)dx$ converge.

Per $x \to \infty$ $f(x) = \dfrac{\log\left(\frac{1+x}{x}\right)}{x^{1/2}} = \dfrac{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^{1/2}} = \dfrac{\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)}{x^{1/2}} = \dfrac{1}{x^{3/2}}(1+o(1))$

quindi $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge per confronto con $g(x) = \dfrac{1}{x^{3/2}}$.

Quindi $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge.

6. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t^2)}{t^2}\, dt$

► (a) è un numero minore di 1

(b) converge ma non converge assolutamente

(c) vale $+\infty$

(d) non esiste

Soluzione:

$\dfrac{\sin(t^2)}{t^2}$ è a segno variabile se $t \in [1, +\infty)$.

Vediamo la convergenza assoluta.

$$\left| \frac{\sin(t^2)}{t^2} \right| = \frac{|\sin(t^2)|}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}$$

e $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt$ converge. Quindi per il criterio del confronto e dell'assoluta convergenza, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t^2)}{t^2}\, dt$ converge.

Inoltre $\dfrac{\sin(t^2)}{t^2} \leq \dfrac{1}{t^2}$ quindi

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t^2)}{t^2}\, dt \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \lim_{M \to \infty} \int_1^M \frac{dt}{t^2} = \lim_{M \to \infty} \left[-\frac{1}{t} \right]_1^M =$$

$$= \lim_{M \to \infty} -\frac{1}{M} + 1 = 1.$$

7. La successione $a_n = n^2 e^{-\frac{1}{n}} \sin n$

► (a) non è limitata né inferiormente né superiormente

(b) non ha limite ma è limitata inferiormente

(c) tende a $+\infty$

(d) non ha limite ma è limitata

Soluzione:

$$a_n = n^2 e^{-\frac{1}{n}} \sin n$$

Osserviamo che $\lim_{n\to\infty} n^2 e^{-\frac{1}{n}} = (+\infty)\cdot e^0 = +\infty$

Ricordando la dimostrazione che $\lim_{n\to\infty} \sin n$ non esiste, possiamo trovare una successione strettamente crescente di numeri interi (k_n) t.c. $\sin(k_n) > \frac{1}{2}$. Ne segue che

$\lim_{n\to\infty} a_{k_n} \geq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\cdot n^2 e^{-\frac{1}{n}} = +\infty \Rightarrow \sup(a_n) = +\infty$.

Analogamente possiamo trovare (h_n) t.c. $\sin(h_n) < -\frac{1}{2}$

e $\lim_{n\to\infty} a_{h_n} \leq \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{2} n^2 e^{-1/n} = -\infty \Rightarrow \inf(a_n) = -\infty$.

8. La successione $a_n = \dfrac{\sin(n^2)+\sin(n)+3}{n^2+n+1}$

► (a) ha massimo ma non ha minimo

(b) non ha né massimo né minimo

(c) ha sia massimo che minimo

(d) è inferiormente ma non superiormente limitata

Soluzione:

$$a_n = \frac{\sin(n^2)+\sin(n)+3}{n^2+n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\text{limitata} + \text{limitata} + 3}{+\infty} = 0$$

Osserviamo che $\sin(n^2)+\sin(n)+3 \geq -1-1+3 = 1 > 0$

e che $n^2+n+1>0 \quad \forall n\in\mathbb{N}$, quindi $a_n>0 \ \forall n\in\mathbb{N}$.

Dalla versione per le successioni del teorema di Weierstrass generalizzato, (a_n) ha massimo ma non ha minimo.

9. La serie $\sum_{n\geq 1}(-1)^n \dfrac{3+n^2\log n}{n^4}$

(a) diverge positivamente

(b) converge semplicemente ma non assolutamente

► (c) converge assolutamente

(d) diverge negativamente

Soluzione:

$$\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{3+n^2\log n}{n^4}$$

Poniamo $a_n = \dfrac{3+n^2\log n}{n^4}$ e osserviamo che la serie è a segni alterni.

Proviamo la convergenza assoluta

$$\sum_{n\geq 1} \left|(-1)^n \frac{3+n^2\log n}{n^4}\right| = \sum_{n\geq 1} a_n .$$

Scegliamo $b_n = \dfrac{1}{n^2(\log n)^{-1}}$ e osserviamo che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+n^2\log n}{n^{\cancel{4}\,2}} \cdot \frac{\cancel{n^2}}{\log n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n^2\log n} + 1 = 1$$

Dato che $\sum_n b_n$ è del tipo $\sum_n \dfrac{1}{n^\alpha(\log n)^\beta}$ con $\alpha = 2 > 1$, la serie converge. Per il criterio del confronto asintotico converge anche $\sum_n a_n$ quindi la serie originale converge assolutamente.

10. La serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n\pi) + (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{n}$

(a) diverge positivamente

(b) converge assolutamente

(c) è indeterminata

► (d) converge ma non converge assolutamente

Soluzione:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n\pi) + (-1)^n \sin\frac{1}{n}}{n}$$

$$\frac{\cos(n\pi) + (-1)^n \sin\frac{1}{n}}{n} = \frac{(-1)^n + (-1)^n \sin\frac{1}{n}}{n} = (-1)^n \left(\frac{1+\sin\frac{1}{n}}{n}\right)$$

Poniamo $a_n = \frac{1+\sin\frac{1}{n}}{n}$ e osserviamo che $a_n \geq 0 \ \forall n \geq 1$.

La serie è quindi a segni alterni.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1 + \text{limitata}}{+\infty} = 0$$

Verifichiamo che a_n è decrescente. Poniamo $b_n = 1 + \sin\frac{1}{n}$ e $c_n = \frac{1}{n}$. Allora $a_n = b_n \cdot c_n$. Le successioni (b_n) e (c_n) sono entrambe decrescenti e di segno positivo, quindi anche (a_n) è decrescente. Possiamo quindi applicare il criterio di Leibniz e ottenere che la serie converge.

Per la convergenza assoluta consideriamo

$$\sum \left| \frac{\cos(n\pi) + (-1)^n \sin\frac{1}{n}}{n} \right| = \sum \left|(-1)^n a_n\right| = \sum a_n.$$

Scegliamo $d_n = \frac{1}{n}$ e osserviamo che $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{d_n} = 1$.

Dato che $\sum \frac{1}{n} = +\infty$, dal criterio del confronto asintotico otteniamo che anche $\sum a_n = +\infty$. La serie quindi non converge assolutamente.

11. $\lim\limits_{(x,y)\to\infty} xy(x^2+y^2-4) =$

(a) $+\infty$ ► (b) non esiste (c) -4 (d) 0

Soluzione:

$f(x,y) = xy\,(x^2+y^2-4)$

Consideriamo la restrizione alla curva $\begin{cases} x=t \\ y=0 \end{cases}$ (asse x)

$g(t) = f(t,0) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{t\to\infty} g(t) = 0$

Consideriamo la restrizione alla curva $\begin{cases} x=t \\ y=t \end{cases}$ (bisettrice).

$h(t) = f(t,t) = t^2\,(t^2+t^2-4) \Rightarrow \lim\limits_{t\to\infty} h(t) = +\infty$

I due limiti sono diversi, quindi il limite

$\lim\limits_{(x,y)\to\infty} f(x,y)$ non esiste.

12. La funzione $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = xy(2x^2+3y^2-9)$

(a) è limitata superiormente ma non inferiormente

(b) è limitata

(c) è limitata inferiormente ma non superiormente

► (d) non è né superiormente né inferiormente limitata

Soluzione:

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = xy(2x^2+3y^2-9)$

Consideriamo la curva $\gamma(t) = (t,1)$. La restrizione di f su γ è la funzione

$g(t) = f(t,1) = t(2t^2+3-9) = t(2t^2-6)$

Dato che $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = +\infty$, $\lim\limits_{t\to-\infty} g(t) = -\infty$, otteniamo che

f non è né superiormente né inferiormente limitata.